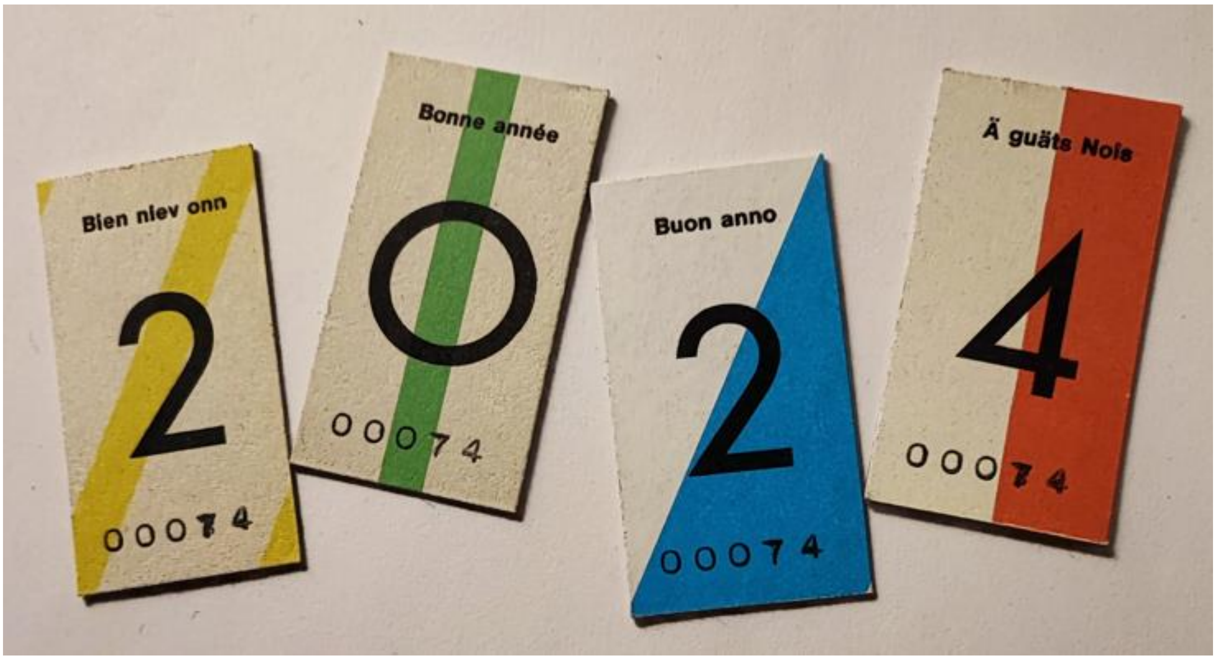
Peter Hammer 24. IX 24
chaosachso21@gmail.com

K unst I st , Bewährtes zu erhalten !



Fabio Parizzi , Rapperswil / SG / CH

K u n s t I s t , A L L E R L  zu ma Thema tisieren !

Peter Hammer chaosachso21@gmail.com

Armin Widmer widmer.ar@bluewin.ch

Felix Huber felix.68@gmx.ch

Rätsel des Monats $2 + 4 + 9 \cdot 2 + 0 = 24$

mathematischer Zündstoff

Idee **Peter Hohler und Peter Hammer**

Bei der Frage, ob es ein **24**-er **Q Q** (**Q**uadrat mit **Q**uersumme **24**) gibt, kommt das **KI** ins Stottern ! Die völlig verwirrende Antwort lautet: «Ja – es gibt eine Quadratzahl mit einer Quersumme **24**. Eine Möglichkeit ist 144, eine andere 576. … Allerdings gibt es keine Quadratzahl, deren Quersumme genau **24** ergibt.»

Dabei weisen bereits erste Quadratzahlen darauf hin, dass es schwierig werden wird, eine Quadratzahl mit einer **Quersumme 24** zu finden. Wie wir wissen, beschränken sich bei einer Betrachtung Modulo 9 die Quersummen der Quadratzahlen auf das Quartett 1, 4, 7 und 9.

2401 – 1024 **24'336 – 28'224**

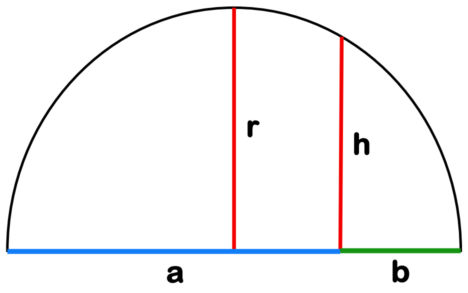
In seinem «**mathematischen Lesebuch**» – erschienen im **Juli 24** im **meoverlag Olten** und erhältlich beim Verlag oder Autor (35 Franken) – startet der ehemalige Gymnasiallehrer **Peter Hohler** verständlicherweise mit Quadratzahlen. Der aussergewöhnliche Blickwinkel deutet bereits das Titelbild an. Seine spannenden Vorträge sind auf 89 Seiten und 12 voneinander unabhängigen Kapiteln zusammengefasst und erweisen sich wegen des Reichtums an Ideen als wertvoller «Zündstoff» für Gymnasien.

Frage **42'693'15z ist eine Quadratzahl.**
Welche Ziffer ist z und wie lässt sich dies beweisen ?

Vermuten ist das eine, beweisen das andere ! **Peter Hohler**, Mathematiker, Schachspieler (Coupe Suisse Sieger 1974) und ehemaliger Experte bei «Schweizer Jugend forscht», liebt es, mit eleganten Beweisen Verblüffendes aufzudecken !

Frage **Gibt es mehrstellige Quadratzahlen mit lauter gleichen Ziffern ?**

Durch die Jahreszahl-Brille betrachtet, wird das zeitlose Buch insbesondere im nächsten Jahr aktuell sein. Greifen wir zu den beiden Zahlen a = 10 und b = 40, so ist das **geometrische Mittel** (GM) **20** und das **arithmetische Mittel** (AM) **25**. Der «stetigen» Ungleichung **AM ≥ GM** widmet **Hohler** ein ganzes Kapitel mit der Einleitung: «Wir betrachten zuerst zwei bekannte Beweise für n = 2, anschliessend einen Beweis für n = 3. Schliesslich folgen drei Beweise für den allgemeinen Fall !»



$$m_a = \frac{a+b}{2} = r$$

$$m_g = \sqrt{a \cdot b} = h$$

Um für n = 2 die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel zu visualisieren, erinnern wir uns an den Höhensatz.

$$m_a = \frac{a+b+c}{3} \quad , \quad m_g = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \quad ; \quad m_a \geq m_g$$

Frage **Gibt es drei natürliche Zahlen a , b und c mit der «Liaison»**

$$m_a = 42 \quad \text{und} \quad m_g = 24\,?$$

Um den Beweis für n = 3 übersichtlich zu gestalten, gibt uns **Peter Hohler** den Tipp:

$$A = \sqrt[3]{a} \quad , \quad B = \sqrt[3]{b} \quad , \quad C = \sqrt[3]{c}$$

zu zeigen $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC \geq 0$

Beweise ! **Für beliebige natürliche Zahlen a , b und c gilt $m_a \geq m_g$.**

Peter Hohler
bei der Senioren WM
in Bled (SLO) / 2018

Lösungen **Rätsel des Monats** $2+4+9\cdot 2+0 = 24$

Für n>1 gilt: n ist genau dann eine Quadratzahl, wenn die Anzahl aller Primfaktoren gerade ist, was sich wie folgt beweisen lässt.

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_r^{\alpha_r} \quad ; \quad (\mathrm{I}) \quad n^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{2\alpha_r}$$

Beispiel $2'024^2 = 4'096'576 = 2^6 \cdot 11^2 \cdot 23^2 \quad ; \quad 6+2+2 = 10$ (**gerade**)

Letzten Endes wird es darum gehen, dass wenn eine Quadratzahl mit der Zahl **6** endet, die Zehnerziffer ungerade sein muss, wie wir dies bei einem Blick auf die «kleinen» Quadratzahlen **1**6, **3**6, 1**9**6, 2**5**6, … vermuten.

Aus der obigen Erkenntnis (I) lässt sich ableiten:

Sind A und B Quadratzahlen und es gilt A = B C , so ist auch C eine Quadratzahl.

Wird die Einerziffer E einer Quadratzahl n^2 unter die Lupe genommen, so lässt sich zeigen, dass die Einerziffer von n^2 und die Einerziffer von E^2 identisch sind.

$$(\mathrm{II}) \quad n^2 = (10a + E)^2 = 100a^2 + 20aE + E^2$$

Somit kann eine Quadratzahl nur mit 0, 1 , 4 , 5 , 6 oder 9 enden, aber unmöglich mit 2, 3 , 7 oder 8. Betrachten wir nun die **zweitletzte Ziffer** von n^2 (**II**).

Beim ersten Summanden (100 a^2) ist die zweitletzte Ziffer eine 0. Beim zweiten Summanden (20aE) ist die zweitletzte Ziffer gerade. Das heisst, wenn die zweitletzte Ziffer von E^2 gerade ist, so ist auch die zweitletzte Ziffer von n^2. Diese Parität trifft auch für den Fall zu, wenn E^2 ungerade ist.

E^2 kann folgende Werte annehmen: **01** , **04** , **09** , **16** , **25** , **36** , **49** , **64** , **81** , **00**

Die zweitletzte Stelle ist nur in zwei Fällen ungerade (1**6** und 3**6**). Dass in beiden Fällen die Einerziffer **6** auftaucht, ist mehr als nur bemerkenswert und lässt folgenden Schluss zu:

Die zweitletzte Stelle von n^2 ist genau dann **ungerade**, wenn die letzte **Ziffer 6** ist.

$$42'693'156 = 6'534^2$$

Bei der Suche nach mehrstelligen Quadratzahlen mit lauter gleichen Ziffern werden schrittweise alle Ziffern ausgeschlossen:

- Eine Quadratzahl aus lauter **1** ist nicht möglich, da wenn die zweitletzte Ziffer ungerade ist, hinten eine 6 stehen muss. Dies gilt auch für die Ziffern **5** und **9**.
- Keine Quadratzahl endet mit **2**, **3**, **7** oder **8**.
- Eine Quadratzahl aus lauter **6** ist nicht möglich, da die zweitletzte Ziffer ungerade sein muss.

Somit bleibt für die letzten beiden Ziffern, die gleich und verschieden von null sein müssen, nur die Variante 4 wie zum Beispiel bei 1**44** oder 1'**444**.

Gibt es eine Quadratzahl, die mit vier Vierern endet?

$$\mathbf{N = 10'000a + 4'444 = 4\cdot\left(2'500a + 1'111\right)}$$

Wenn N eine Quadratzahl ist, so muss auch 2'500 a + 1'111 eine Quadratzahl sein. Diese Zahl endet aber mit zwei Ziffern 1 am Ende, was unmöglich ist.

Fazit: Es können sich höchstens drei 4-er am Ende einer Quadratzahl befinden.

Schliesslich stellen wir noch fest, dass 44 und 444 keine Quadratzahlen sind.

Bei der Suche von a, b und c mit dem arithmetischen und geometrischen Mittel

$$\mathbf{m_a = 42} \quad \text{und} \quad \mathbf{m_g = 24}$$

erweist sich 24 – 24 – 24 als idealer Ausgangspunkt. Teilen wir a durch 4 und multiplizieren c mit 4, so sind wir bereits am Ziel **6 – 24 – 96** ! Ab und zu braucht es «nur» einen glücklichen Zufall, um schnell ans Ziel zu kommen.

zu zeigen $\mathbf{A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC \geq 0}$

$$= (A+B+C)\cdot\left(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC\right)$$

$$= \frac{1}{2}(A+B+C)\cdot\left(2A^2 + 2B^2 + 2C^2 - 2AB - 2AC - 2BC\right)$$

$$= \frac{1}{2}(A+B+C)\cdot\left(2A^2 + 2B^2 + 2C^2 - 2AB - 2AC - 2BC\right)$$

$$= \frac{1}{2}(A+B+C)\cdot\left((A-B)^2 + (A-C)^2 + (B-C)^2\right) \geq 0$$

da alle Quadrate ≥ 0 sind !