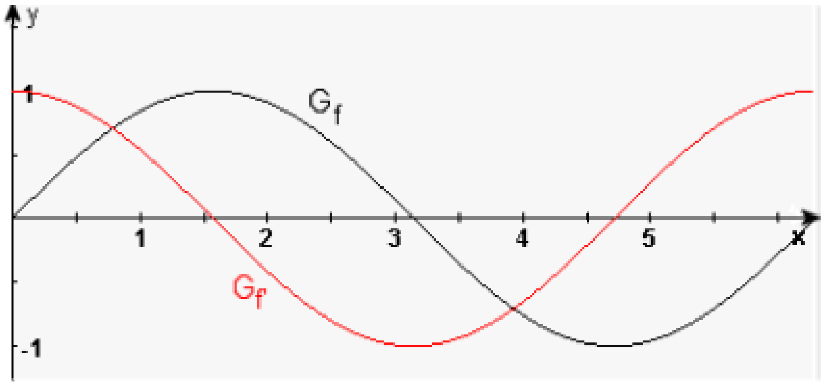
Die Ableitungsfunktion der Sinus-Funktion

Gegeben: $y = f(x) = \sin x$ Gesucht: $f'(x) = ?$



Wie man durch Konstruktion von einigen Punkten von $G_{f'}$ vermuten kann:

Behauptung: $\quad$ **$y = f(x) = \sin x \quad \rightarrow \quad f'(x) = \cos x$**

Beweis: Es gilt von früher:

1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ (Additionstheorem 1. Art)

2) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

3) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \rightarrow$ (mit $\alpha = \frac{h}{2}$) $\quad \cos h - 1 = -2\sin^2\frac{h}{2}$

Sei x_0 fest:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin x_0 (\cos h - 1)}{h} + \cos x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\sin x_0 \cdot \frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h} \right) + \lim_{h\to 0} \left(\cos x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} \right)$$

$$= \sin x_0 \lim_{h\to 0} \left(-\sin\frac{h}{2} \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) + \cos x_0 = \sin x_0 \cdot 0 \cdot 1 + \cos x_0 = \cos x_0$$

Da x_0 beliebig war, so gilt die Behauptung.

Bem.: Benützt man das Additionstheorem 2. Art für Sinus, nämlich

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, so wird die Herleitung einfacher!

Als Hausaufgabe!