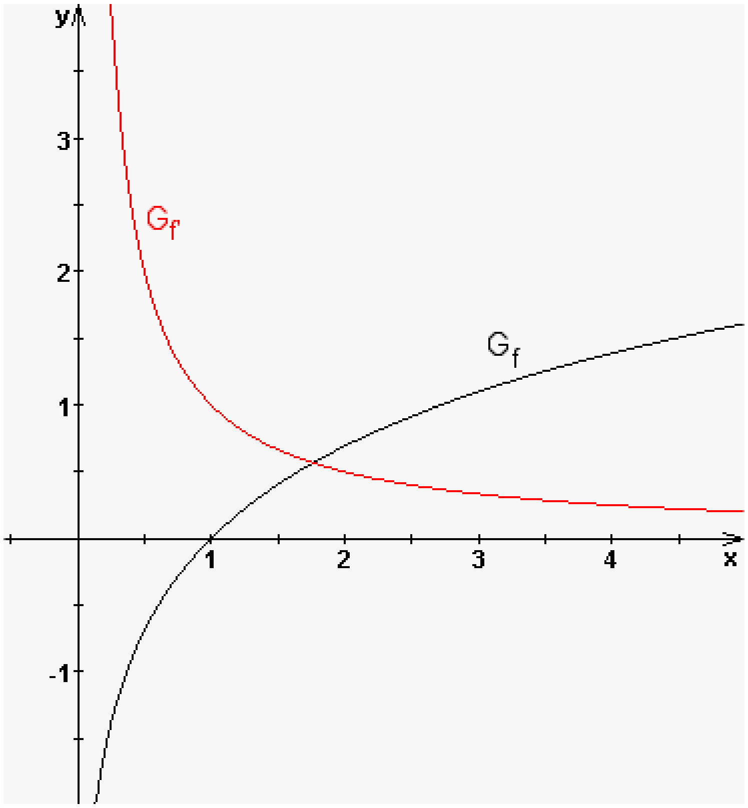
Die Ableitungsfunktion der Logarithmus-Funktion

Gegeben: $y = f(x) = \ln x$ Gesucht: $f'(x) = ?$



Repetition:

1) $a^x = r \Leftrightarrow x = \log_a r$
   $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, r \in \mathbb{R}^+$

2) $\log(uv) = \log u + \log v$
   $\log(u/v) = \log u - \log v$
   $\log u^z = z \log u$

3) $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n \approx 2.71828 \ldots$

Behauptung: $\mathbf{y = f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$

Beweis: Sei $x_0 \in D_f = \mathbb{R}^+$ beliebig

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x_0+h}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x_0})}{h}$$

Setzt man $z := \frac{x_0}{h}$, so gilt: $h \rightarrow 0 \leftrightarrow z \rightarrow \infty$ (h>0; der Fall h<0 wäre separat zu behandeln und führt zum gleichen Schlussresultat)

Also gilt: $$f'(x_0) = \lim_{z\to\infty} \frac{z\ln(1+\frac{1}{z})}{x_0} = \frac{1}{x_0} \lim_{z\to\infty} (\ln(1+\frac{1}{z})^z) = \frac{1}{x_0} \ln(\lim_{z\to\infty} (1+\frac{1}{z})^z) =$$

$= \frac{1}{x_0} \ln e = \frac{1}{x_0}$ (hier darf ln und lim vertauscht werden)

Da x_0 beliebig war, so gilt die Behauptung.