Lösung Aufgabe Nr. 1

$y' \cos x + y \sin x = \tan x$ (*)

a) $y' := k =$ konstant $\qquad y \sin x = \tan x - k \cos x \quad | : \sin x \neq 0$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{\cos x} - \frac{k \cos x}{\sin x}}}$$

für $y' := 0$: $\qquad \underline{\underline{y = \frac{1}{\cos x}}}$ $\qquad$ Graph s. später

b) $y' \cos x + y \sin x = 0$ (**)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y \sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{y} = -\tan x \, dx$$

$\ln |y| + \ln C^* = \ln |\cos x|$, also $|C^* y| = |\cos x|$

Lösungsgesamtheit der homogenen Gleichung $\underline{y = C \cdot \cos x}$ $(C \in \mathbb{R})$

c) Ansatz $y_0 = C(x) \cdot \cos x$, damit $y_0' = C'(x) \cdot \cos x - C(x) \cdot \sin x$

eingesetzt in (**): $C'(x) \cdot \cos^2 x - C(x) \cdot \sin x \cos x + C(x) \cdot \cos x \sin x = \tan x$

Also ist $C'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} = \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$

Integration mit TI Voyage (bzw. Substitution mit $z = \cos x$) liefert $C(x) = \dfrac{1}{2 \cos^2 x}$

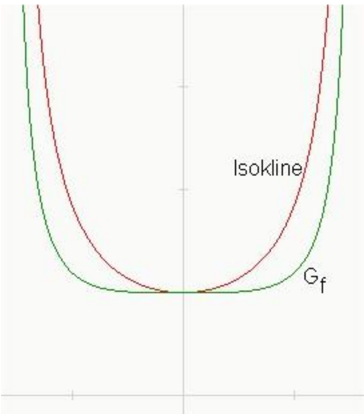
Daher ist $y_0 = \dfrac{1}{2 \cos x}$

Lösungsgesamtheit der inhomogenen Gleichung $\underline{\underline{y = C \cdot \cos x + \dfrac{1}{2 \cos x}}}$ $(C \in \mathbb{R})$

d) Punkt $P(0|1) \in$ Graph G_f: $1 = C + 0.5$, also $C = 0.5$

$$\underline{\underline{y = f(x)}} = \frac{1}{2}\left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right) = \underline{\underline{\frac{\cos^2 x + 1}{2 \cos x}}}$$

G_f ist symmetrisch zur y-Achse, vertikale Asymptoten mit Gleichungen $x = \pm 0.5\pi$



Lösung Aufgabe Nr. 2

$$w = f(z) = \frac{2z - i}{z + i}$$

a) Definitionsmenge <u>$D = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$</u>

für f^{-1}: $\quad z\,w + i\,w = 2z - i$

$z(w - 2) = -i - i\,w$

$z = \dfrac{i(w+1)}{2-w}$, also ist die Wertemenge W = <u>$\mathbb{C} \setminus \{2\}$</u>

b) k: $|z| = 1$, $k' = f(k)$

$\left|\dfrac{i(w+1)}{2-w}\right| = \left|\dfrac{w+1}{2-w}\right| = 1$. Also gilt für k': $|w + 1| = |2 - w| = |w - 2|$

Schreibweise: A(x+iy) bedeutet Punkt A(x|y).
k' ist also die Mittelsenkrechte der Strecke A(-1)B(2), hat daher die Gleichung k': u = 0.5
bzw. k': $w + \overline{w} - 1 = 0$
(erhält man auch durch Rechnung $(w + 1)(\overline{w} + 1) = (w - 2)(\overline{w} - 2)$ ….)

c) g': $w + \overline{w} - 4 = 0$ (g' also parallel zu k', g': u = 2)

für g gilt: $\dfrac{2z - i}{z + i} + \dfrac{2\overline{z} + i}{\overline{z} - i} - 4 = 0$

$2z\overline{z} - 2iz - i\overline{z} - 1 + 2z\overline{z} + 2i\overline{z} + i\,z - 1 - 4z\overline{z} - 4i\overline{z} + 4i\,z - 4 = 0$

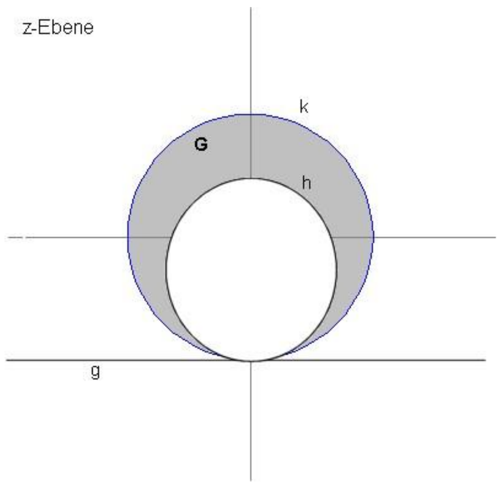
$3iz - 3i\overline{z} - 6 = 0$, also g: $iz - i\overline{z} - 2 = 0$, bzw. g: y = -1, also ist g in der Tat die Parallele zur reellen Achse durch P(-i).

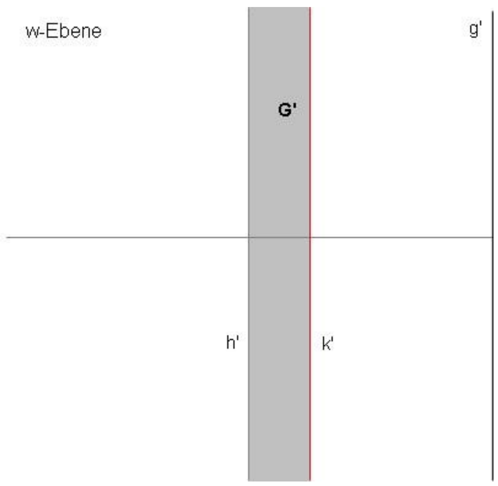
d) Imaginäre Achse h': $-w = \overline{w}$

für h gilt: $-\dfrac{2z - i}{z + i} = \dfrac{2\overline{z} + i}{\overline{z} - i}$, also $-2z\overline{z} + 2iz + i\overline{z} + 1 = 2z\overline{z} + 2i\overline{z} + i\,z - 1$

$4\,z\overline{z} - iz + i\overline{z} - 2 = 0$, also $(z - (-0.25i))(\overline{z} - 0.25i) = \dfrac{9}{16}$

Das Urbild h ist also ein <u>Kreis</u> mit Mittelpunkt <u>M(-0.25i)</u> und Radius <u>r = 0.75</u>.





Lösung Aufgabe Nr. 3

a1) $x' = x$
$y' = 2x + 3y$

Da $\begin{pmatrix} a_1 - 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ parallel $\begin{pmatrix} b1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, so ist f eine perspektive Affinität mit

Affinitätsrichtung r || $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und Affinitätsachse s: $2x + 2y = 0$, bzw. $\underline{s: y = -x}$

Da g: $y = -x + 1$ || s, so muss g' ebenfalls || s sein:

f^{-1}: $x = x'$ und $y = \frac{y' - 2x'}{3}$

Also gilt für g': $x' + \frac{y' - 2x'}{3} - 1 = 0$, daher $3x' + y' - 2x' - 3 = 0$

$\underline{g': x' + y' - 3 = 0}$, also in g' der Tat parallel zu g.

a2) Damit f Scherung, so $\begin{pmatrix} a_1 - 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ || $\begin{pmatrix} b1 \\ 3-1 \end{pmatrix}$ || r || s (r: Affinitätsrichtung, s: Aff.achse)

Also ist $b_1 = a_1 - 1$.
Wegen der zweiten Gleichung der Abbildung muss s die Gleichung $y = -x$ haben.
Also ist r || $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ || $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit wird $\underline{\underline{b_1 = -2}}$ und $\underline{\underline{a_1 = b_1 + 1 = -1}}$.

b) k_1: $x^2 + y^2 = 9$. Also Mittelpunkt $M_1(0|0)$ und Radius $r_1 = 3$.

Ansatz für die Mittelpunkte der Kreise k: M(u|v), Radius r

Für k gilt: k berührt k_1 von aussen: $\overline{MM_1} = r + r_1$: $\quad u^2 + v^2 = (r + 3)^2$ (1)

Zudem $P(9|0) \in k$: $\quad (9 - u)^2 + v^2 = r^2$ (2)

(1) - (2) ergibt: $u^2 - (9 - u)^2 = (r + 3)^2 - r^2$, also $-81 + 18u = 6r + 9$
Daher ist $r = 3u - 15$.
Eingesetzt in (1): $u^2 + v^2 = (3u - 12)^2 = 9u^2 - 72u + 144$

$8(u^2 - 9u) - v^2 = -144$, daher $8((u - 4.5)^2 - 20.25) - v^2 = -144$

$8(u - 4.5)^2 - v^2 = -144 + 162 = 18$

$$\underline{\underline{\frac{(u-4.5)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{v^2}{18} = 1}}$$

Die Mittelpunkte liegen also auf dem rechten Ast der Hyperbel mit Mittelpunkt (4.5|0).

(auf dem linken Ast liegen die Mittelpunkte derjenigen Kreise, die k von innen berühren, $\overline{MM_1} = r - r_1$, führt auf dieselbe Hyperbelgleichung).

Lösung Aufgabe Nr. 4

4.1.

Kreisbahnansatz: $m\omega^2 r = G\frac{mm_E}{r^2}$;

mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $r = r_E + h$ folgt: $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm_E}}$,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{6571000^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}}} = 5303.6s = 88\min 23.6s \text{ s}$$

4.2.

Energieansatz: $E_1 + \Delta E = E_2 \Rightarrow E_1 = \frac{m}{2}v_1{}^2 - G\frac{mm_E}{r_1}$, $E_2 = \frac{m}{2}v_2{}^2 - G\frac{mm_E}{r_2}$

Kreisbahnansatz: $\frac{mv^2}{r} = G\frac{mm_E}{r^2} \Rightarrow v^2 = G\frac{m_E}{r}$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}Gmm_E\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10^3\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot\left(\frac{1}{6571000} - \frac{1}{6671000}\right)Nm = 454{,}2\cdot 10^6\,Nm$$

Diese Energiedifferenz muss als Arbeit vom Triebwerk verrichtet werden.

Lösung Aufgabe Nr. 5

Energieerhaltungssatz: $E_{kin} = E_{pot}$

$$E_{kin} = \frac{m}{2}v^2 + \frac{J_S}{2}\omega^2,\quad E_{pot} = mgh \quad\Rightarrow\quad \frac{m}{2}v^2 + \frac{J_S}{2}\omega^2 = mgh \;\Rightarrow\; h = \frac{v^2}{2g}\left(1 + \frac{J_S}{mr^2}\right)$$

Hohlzylinder: $J_S = mr^2 \Rightarrow h = \frac{v^2}{g}$

Vollzylinder: $J_S = \frac{1}{2}mr^2 \Rightarrow h = \frac{3}{4}\frac{v^2}{g}$

Lösung Aufgabe Nr. 6

Das durch die Feder am Stab erzeugte Drehmoment kann für kleine Ausschläge durch

$$M = -F_F \cdot l = -D \cdot \Delta y \cdot l$$

dargestellte werden. Mit $\Delta y = l \cdot \varphi$ ist $M = -D \cdot l^2 \cdot \varphi$.

Einsetzen in das Grundgesetz der Drehbewegung $J_A \cdot \ddot{\varphi} = M$ liefert die Schwingungsdifferentialgleichung

$J_A \cdot \ddot{\varphi} = -D \cdot l^2 \cdot \varphi$ und mit $J_A = \frac{1}{3} m l^2 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{3D}{m} \cdot \varphi = 0$.

Daraus kann der Schwingungsparameter $\omega^2 = \frac{3D}{m}$ abgelesen werden und in die Formel

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{3D}}$ umgeformt werden.

Lösung Aufgabe Nr. 7

7.1.
Begründung: Zum Strom durch die Widerstände kommt der Ladestrom des Kondensators hinzu. Erst wenn der Kondensator geladen ist, stellt sich die Gesamtstromstärke 500 mA ein.

$R = \frac{U}{I}$, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{90\Omega}$, $R_1 = 60\Omega$

7.2.
$Z = \frac{U}{I}$, $\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{{X_C}^2}$, $X_C = \frac{1}{\omega C}$, $C = 38{,}4\mu F$

Zeigerdiagramm

$\varphi = 23{,}4°$

7.3.
$\varphi = 0 \Leftrightarrow X_C = X_L$, $\frac{1}{\omega C} = \omega L$, $L = \frac{1}{\omega^2 C}$, $L = 0{,}264H$

Lösung Aufgabe Nr. 8

8.1.
Angabe der Richtung, Begründung mit $\overrightarrow{F_L} = -\overrightarrow{F_E}$

8.2.
aus $F_E = F_L$ folgt mit $F_E = qE$ und $F_L = qvB$: $E = vB$, $E = 2{,}5 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$

8.3.
Begründung: Lorentzkraft ist Radialkraft

Kreisbahnansatz: $F_r = F_L$, $\frac{mv^2}{r} = qvB$, $\frac{q}{m} = \frac{v}{rB}$, $\frac{q}{m} = \frac{5 \cdot 10^5}{0{,}021 \cdot 0{,}5} \frac{C}{kg} = 47{,}6 \cdot 10^6 \frac{C}{kg}$