KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Schriftliche Maturitätsprüfung 2011

Kantonsschule Reussbühl Luzern

Fach	***Schwerpunktfach Physik/Mathematik***
Prüfende Lehrpersonen	*Bernhard Berchtold* *Luigi Brovelli*
Klassen	*6c / 6K*
Prüfungsdatum	*30. Mai 2011*
Prüfungsdauer	*3 Stunden*
Erlaubte Hilfsmittel	*Formelsammlung „Fundamentum“ mit einem Beiblatt, Taschenrechner TI Voyage-200*
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	• *Die Mathematikaufgaben (1 – 4) und Physikaufgaben (5 – 8) sind auf separaten Bogen zu lösen.* • *Formeln, welche nicht der Formelsammlung entnommen werden, sind zu beweisen oder zu begründen.* • *Aufgaben 5 - 8: Wenn Sie für eine Teilaufgabe ein Resultat einer vorhergehenden Teilaufgabe verwenden müssen, welche Sie nicht gelöst haben, können Sie mit einem selbst gewählten Wert weiter rechnen. Dieser ist dann aber deutlich zu kennzeichnen.*
Anzahl erreichbarer Punkte	*Aufgabe 1: 8* *Aufgabe 2: 8* *Aufgabe 3: 8* *Aufgabe 4: 6* *Aufgabe 5: 8* *Aufgabe 6: 8* *Aufgabe 7: 6* *Aufgabe 8: 8* *Total: 60* *Für 50 Punkte wird die Note 6 erteilt (Notenskala linear)*
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	*6*

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1: Differentialgleichung (8 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung $xy' + 2y = \sin x \quad (x \neq 0)$

a) Wie heisst die Gleichung der Isoklinenschar? Bestimmen Sie speziell die Gleichung der Isokline für die Steigung 0 der gesuchten Kurven. (2 Punkte)
b) Berechnen Sie die Lösungsgesamtheit der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung (TI Voyage nur zur Kontrolle). (2 Punkte)
c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung y_0 der inhomogenen Differentialgleichung mit Hilfe der Variation der Konstanten. Das dabei auftretende Integral kann mit dem TI Voyage gelöst werden. (2 Punkte)
d) Wie lautet die Lösungsgesamtheit der gegebenen Differentialgleichung? (1 Punkt)
e) Welche Lösungskurve geht durch den Punkt $P(\pi|0)$?
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung. (1 Punkt)

{Wer Teilaufgabe c) nicht lösen kann, benützt zur Lösung von e) das Resultat des TI Voyage für die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Differentialgleichung}

Aufgabe 2: Komplexe Zahlen und Funktionen (8 Punkte)

Gegeben ist die komplexe Funktion $z \rightarrow w = f(z) = \dfrac{2z - i}{z - i}$

a) Bestimmen Sie Definitionsmenge D und Wertemenge W von f. (2 Punkte)
b) Welches ist das Bild g' der reellen Achse g? (2 Punkte)
c) Wie lautet die Gleichung des Urbildes h des Kreises h': $|w - 1| = 1$? (2 Punkte)
d) Stellen Sie alle vorgekommenen Urbilder und Bilder in zwei Gauss-Ebenen dar. (Einheit = 2cm).
G sei das zwischen g und h eingeschlossene Gebiet. Wohin wird dieses Gebiet abgebildet? (2 Punkte)

Aufgabe 3: Kegelschnitte und Affinitäten (8 Punkte)

Gegeben sind die Abbildungen f_a mit den Gleichungen

$$x' = a\,x + 2y$$
$$y' = 2x - y$$

a) Für welches a ist f_a keine Affinität? (1 Punkt)
b) Wie gross ist a, damit f_a eine perspektive Affinität wird?
Bestimmen Sie Affinitätsachse, Affinitätsrichtung und zeigen Sie, dass es sich um eine normale Affinität handelt. (3 Punkte)
c) Berechnen Sie die Gleichungen der Umkehrabbildung f^{-1} der Abbildung von Teilaufgabe b). (2 Punkte)
d) Eine Parabel p mit Scheitelpunkt S(1/0) und der x-Achse als Parabelachse geht durch den Punkt Q(2/2). Wie lautet ihre Gleichung? (1 Punkt)
e) Berechnen Sie die Gleichung des Bildes p' der Parabel p unter der Abbildung f von b). (1 Punkt)

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung: Testverfahren (6 Punkte)

Bei den letzten Wahlen hat die Partei A 28% der Stimmen erhalten.
Heute behauptet jemand, dass sich der Stimmenanteil der Partei A **vergrössert** hat.
Eine Stichprobe von 500 Befragten ergibt 156 Parteistimmen.
Testen Sie die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau von 5%. Berechnen Sie den dazugehörigen Verwerfungsbereich mit Hilfe der Approximation mit Normalverteilung (verbesserte Näherungsformel) und kontrollieren Sie diesen Verwerfungsbereich anschliessend mit Binomialverteilung.
Ist die Abweichung signifikant?

Aufgabe 5: Gravitation (8 Punkte)

Eine Raumfähre umkreist die Erde antriebslos in einer Höhe von 550km über der Erdoberfläche.

a) Berechnen Sie ihre Geschwindigkeit und geben Sie eine kurze Herleitung der Formel, die Sie dazu verwenden. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Zeit, welche die Fähre für einen Umlauf benötigt. (1 Punkt)

c) Durch kurzzeitiges Zünden der Triebwerke wird die Raumfähre auf eine elliptische Umlaufbahn gebracht. Ihre Höhe über der Erdoberfläche beträgt nun 1'850km im höchsten und 550km im tiefsten Punkt der Bahn. Wie lange dauert ein Umlauf jetzt? (2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der Fähre im höchsten und im tiefsten Punkt der elliptischen Bahn. (3 Punkte)
Hinweis: Benützen Sie das zweite Keplersche Gesetz und den Energieerhaltungssatz.

Aufgabe 6: Wärmelehre (8 Punkte)

Eine Wärmekraftmaschine besteht aus einem Zylinder, der mit 0.032mol Stickstoff gefüllt ist. Ihre Arbeitsweise kann durch folgenden idealisierten, aus vier Schritten bestehenden Kreisprozess beschrieben werden:

1. Vom Anfangszustand (p_A = 600'000Pa, V_A = 0.2Liter, T_A = 450K, Zustand A) aus erfolgt eine isobare Expansion auf das Volumen V_B = 0.3Liter (Zustand B)
2. Nun wird isochor abgekühlt, bis wieder die Anfangstemperatur $T_C = T_A$ = 450K erreicht wird (Zustand C).
3. Anschliessend wird isobar komprimiert, bis das Ausgangsvolumen $V_D = V_A$ erreicht wird (Zustand D)
4. Zuletzt wird das Gas isochor erwärmt, bis wieder der Anfangszustand erreicht ist (Zustand A).

a) Skizzieren Sie ein qualitatives *p*-*V*-Diagramm des Kreisprozesses. Bezeichnen Sie deutlich, wo die Zustände A-D liegen und in welcher Richtung der Kreisprozess durchlaufen wird. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Temperatur T_B von Zustand B und die Temperatur T_D von Zustand D. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad der Maschine. (4 Punkte)

Aufgabe 7: Induktion (6 Punkte)

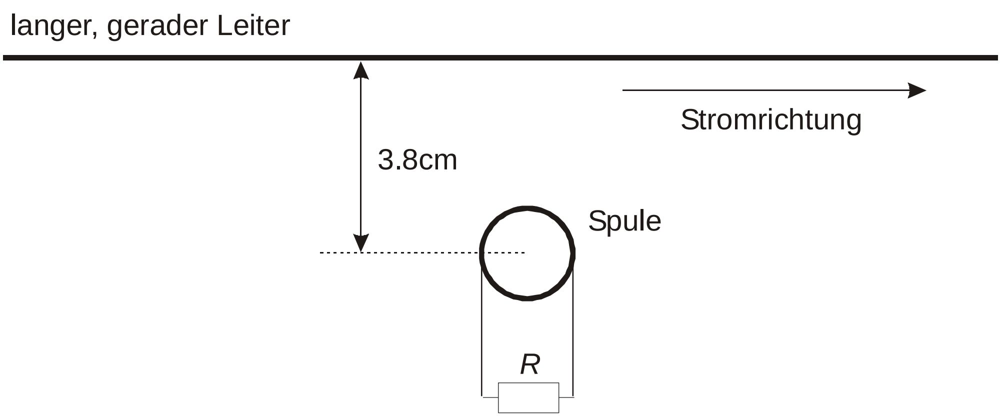
In einem langen, geraden Leiter fliesst ein veränderlicher Strom von links nach rechts (technische Stromrichtung). In 3.8cm Abstand befindet sich eine kleine Spule (Querschnittsfläche 3.2cm^2, 420 Windungen). Ihre beiden Anschlüsse sind über einen Widerstand R = 4.7Ω miteinander verbunden. Der Widerstand der Spule selbst beträgt 1.2Ω.

a) Welcher Strom wird in der Spule induziert, wenn der Strom im geraden Leiter innerhalb von 0.2s gleichmässig von 0A auf 20A erhöht wird? (2 Punkte)

b) Zeichnen Sie für diesen Fall die Stromrichtung in der Spule ein. Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

c) Wie gross ist die in der Spule induzierte Stromstärke, wenn der Strom im geraden Leiter konstant 20A beträgt? (1 Punkt)

d) Angenommen, wir können den Strom im geraden Leiter nicht beeinflussen. Beschreiben Sie eine andere Möglichkeit, in der Spule einen Strom zu induzieren! (1 Punkt)



Aufgabe 8: Differentialgleichungen, Wechselströme (8 Punkte)

Ein ohmscher Widerstand R = 25Ω, eine Spule mit Induktivität L = 100mH und ein Kondensator der Kapazität C = 40μF sind in Serie an eine Spannungsquelle geschaltet, welche eine harmonische Wechselspannung liefert: $U(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ mit dem Scheitelwert $\hat{U}$ = 20V und der Kreisfrequenz ω = 400s^{-1}.

a) Berechnen Sie die Impedanz (Betrag und Phase) der ganzen Anordnung und den Scheitelwert $\hat{I}$ der Stromstärke im Stromkreis. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie den Scheitelwert $\hat{U}_C$ der Spannung über dem Kondensator und die Phasenverschiebung in Bezug auf die Spannungsquelle. (3 Punkte)

c) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf für die Spannung über dem Kondensator und berechnen Sie den Scheitelwert $\hat{U}_C$ noch einmal mit Hilfe dieser Differentialgleichung. (3 Punkte)