Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik

Prüfende Lehrpersonen	*Yves Gärtner (yves.gaertner@edulu.ch)* *Jörg Donth (joerg.donth@edulu.ch)*
Klassen	*6c*
Prüfungsdatum	*31. Mai 2012*
Prüfungsdauer	*3 Stunden*
Erlaubte Hilfsmittel	*Taschenrechner V-200, Formelsammlung „Fundamentum“ mit Beiblättern*
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	• *Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Bogen.* • *Alle verwendeten Symbole sind zu definieren (sofern nicht im Aufgabentext definiert).* • *Formeln, welche nicht der Formelsammlung entnommen werden, sind zu beweisen oder zu begründen.* • *Bei den Aufgaben 1 - 5 sind physikalisch relevante Ansätze zu begründen und allgemeine Lösungen anzustreben.* • *Bei den Aufgaben 6 - 9 sind alle algebraischen Umformungen und alle Berechnungen manuell auszuführen. Der V-200 darf nur für numerische Berechnungen oder zur Kontrolle benützt werden.* • *Wenn Sie für eine Teilaufgabe ein Resultat einer vorhergehenden Teilaufgabe verwenden müssen, welche Sie nicht gelöst haben, können Sie, falls keine Alternative gegeben wird, mit einem selbst gewählten Wert weiter rechnen. Dieser ist dann aber deutlich zu kennzeichnen.*
Anzahl erreichbarer Punkte	*Aufgabe 1: 6* *Aufgabe 2: 6* *Aufgabe 3: 6* *Aufgabe 4: 6* *Aufgabe 5: 6* *Aufgabe 6: 9* *Aufgabe 7: 9* *Aufgabe 8: 7* *Aufgabe 9: 5* *Total: 60* *Notenmassstab: 48 Punkte = Note 6*
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	*5*

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg

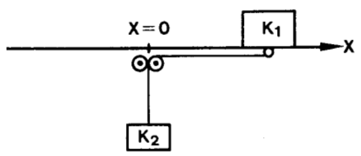
Aufgabe 1: (6 Punkte)

Gegeben sind folgende mechanische Systeme:
Der Körper K_1 mit der Masse m_1 gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen Schiene.
Zum Zeitpunkt t = 0 befindet sich K_1 bei x_1; die Anordnung wird frei gegeben.

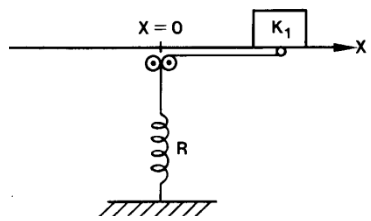
System 1: K_1 ist durch eine Schnur und ein Rollenpaar mit einem frei hängenden Körper K_2 der Masse m_2 verbunden.

System 2: K_1 ist durch eine Schnur und ein Rollenpaar mit einer Feder R verbunden. An der Stelle x_1 wirkt auf K_1 die Federkraft F_1. Befindet sich K_1 im Bereich $-0{,}30m \le x \le 0{,}30m$, ist R entspannt.

$m_1 = 0{,}625$ kg $m_2 = 0{,}125$ kg $x_1 = 0{,}50$ m $F_1 = 0{,}50$ N



System 1



System 2

a) Analysieren Sie die einsetzende Schwingungsbewegung für System 1 und System 2. Handelt es sich um eine harmonische Schwingung? Erläutern Sie!

b) Berechnen Sie die Schwingungsdauer für System 1 und System 2.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

a) Eine Vollkugel rollt auf einer horizontalen Ebene. Welcher Bruchteil ihrer Energie entfällt auf Rotationsenergie bezüglich ihrer Schwerpunktachse?

b) Ein 6 m langer, am Boden liegender Balken der Masse 20 kg soll an einem Ende innerhalb von 1 s um 1 m angehoben werden. Welche konstante Kraft ist dazu notwendig?

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Am 19. Juli 1969 erreichte Apollo 11 nach einem Bremsmanöver eine Mondumlaufbahn. Während das Mutterschiff den Mond auf einer nahezu kreisförmigen Bahn in 112 km Höhe umflog, stieg die Landefähre einen Tag später zur ersten bemannten Mondlandung ab.

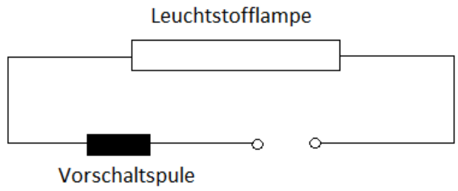
a) Wie lange dauerte eine Umkreisung des Mondes durch das Mutterschiff und welche Bahngeschwindigkeit hatte es dabei?

b) Welche Energie pro 1 kg Masse benötigte die Landefähre, um von der Mondoberfläche zum Mutterschiff zurückzukehren?

Daten zum Erdmond: Masse: $m = 7{,}35 \cdot 10^{22}\, kg$ mittlerer Radius: $r_M = 1738 km$

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Eine Leuchtstofflampe wurde nach der dargestellten Schaltung angeschlossen; die Frequenz der angelegten Wechselspannung beträgt 50 Hz.



Folgende Effektivwerte wurden gemessen:
Gesamtspannung (Netzspannung) U = 228.3 V,
Stromstärke I = 0,6 A,
Teilspannung über der Leuchtstoffröhre (im Betrieb) U_{LA} = 84 V,
ohmscher Widerstand der Vorschaltspule R_S = 26,3 Ω.

Die Leuchtstoffröhre darf als ohmscher Widerstand betrachtet werden.

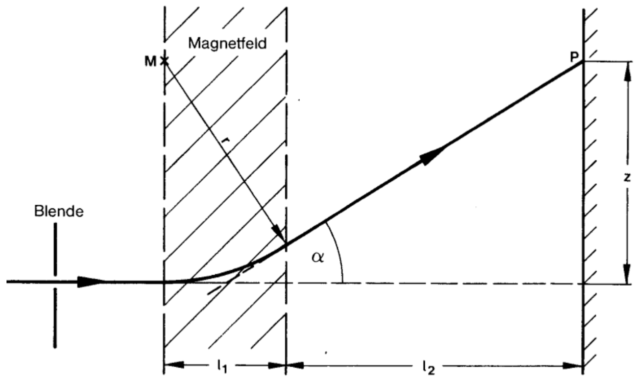
a) Welche Induktivität besitzt die Vorschaltspule?

b) Wie gross ist die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung?

c) Welche Wirkleistung wird im Stromkreis umgesetzt?

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Cu^{++}- Ionen der spezifischen Ladung $\frac{q}{m}$ und der Energie E durchlaufen ein homogenes Magnetfeld mit der Flussdichte B, werden dabei um den Winkel α abgelenkt und erreichen im Punkt P einen Leuchtschirm. Die nebenstehend skizzierte Bahnkurve verläuft in der Zeichenebene, das Magnetfeld tritt senkrecht in die Zeichenebene ein.



$\frac{q}{m} = 3{,}04 \cdot 10^6 \frac{C}{kg}$ $\quad E = 500eV$ $\quad B = 0{,}010T$ $\quad l_1 = 0{,}20m$ $\quad l_2 = 1{,}0m$

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Cu^{++}- Ionen beim Eintritt in das Magnetfeld.

b) Zeigen Sie, dass der Radius r des durchlaufenen Kreisbahnabschnittes $r = 1{,}28m$ beträgt.

c) Berechnen Sie den Ablenkwinkel α und den Abstand z des Auftreffpunktes P von der ursprünglichen Bahn.

Aufgabe 6: Komplexe Funktionen (9 Punkte)

Gegeben sind die 2 komplexe Funktionen $f(z)=\dfrac{4i}{z+5i}$ und $h(z)=1+\dfrac{i}{z}$.

a) Geben sie den grösst möglichen Definitionsbereich für jede der beiden Funktionen an und berechnen Sie ihre Nullstellen und die Fixpunkte der Funktion h.

b) Berechnen Sie die Schnittstellen von f und h. (zur Kontrolle: $z_1=2-i$ und $z_2=-2-i$)

c) Die 2 Schnittstellen z_1 und z_2 von f und h und das Bild w_1 von z_1 unter h definieren ein Dreieck $\Delta z_1 z_2 w_1$.
Bestimmen Sie den Winkel $\gamma=\angle z_1 w_1 z_2$ bei der Ecke w_1.

d) Die Gerade g geht durch die Schnittstellen z_1 und z_2 von f und h. Bestimmen Sie das Bild von g unter der Funktion h. Was stellt dieses Bild $h(g)$ dar?

Aufgabe 7: Differentialgleichung (9 Punkte)

Gegeben ist die DGL 1. Ordnung $y'(x)=(2x-1)\cdot y(x)$.

a) Geben Sie die Gleichungen der Isoklinenschar der DGL an (mit der Steigung k als Scharparameter). Was für Kurven bilden ihre Graphen?

b) Lösen Sie die DGL mit der Methode der Separation der Variablen.

c) Nun betrachten wir die inhomogene DGL $\tilde{y}'(x)=(2x-1)\cdot\tilde{y}(x)-\dfrac{5}{2}e^{x^2-1}$.

Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $\tilde{y}_p(x)$ dieser DGL mit der Methode der Variation der Konstanten und geben Sie dann die Lösungsmenge der DGL an.

d) Welche Steigung hat diejenige Lösungskurve $\tilde{y}_1(x)$, die durch den Punkt $P(1|2)$ geht im Punkt P? Vergleichen Sie diese Steigung mit der Steigung derjenigen Lösungskurve $y_1(x)$ der ursprünglichen homogenen DGL, die durch P geht, im Punkt P.

Aufgabe 8: Taylor-Reihe (7 Punkte)

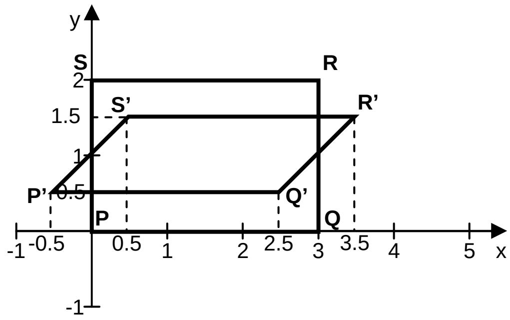
Die Funktion $U(x)$ ist unbekannt. Wir kennen aber ihre Ableitungsfunktion $U'(x)=\pi-\ln|\pi-x|$ und den Funktionswert $y_0=U(x_0)=0$ von U an der Stelle $x_0=\pi+1$.

a) Entwickeln Sie $U(x)$ in ihre Taylor-Reihe $p(x)=p(x_0+h)$ (mit $h=x-x_0$) bei der Entwicklungsstelle $x_0=\pi+1$ und ermitteln Sie den maximalen Konvergenzbereich ID von $p(x)$ (Ränder nicht beachten).

b) Berechnen Sie den Funktionswert von U an der Stelle $x_1=\pi+1.1$ auf 3 Stellen nach dem Komma genau (d.h. gerundet auf die 4. Stelle) mit Hilfe der Taylor-Reihe $p(x)$ unter der Annahme, dass diese in ID gegen $U(x)$ konvergiert.

Aufgabe 9: Affine Abbildung (5 Punkte)

Für den 3D-Darstellungsmodus der Kartenansicht eines Navigationsgerätes soll der durch das Rechteck PQRS in der nebenstehenden Abbildung dargestellte Bildbereich durch eine affine Abbildung $\alpha : \vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{v}$ in das Parallelogramm P'Q'R'S' transformiert werden.



a) Ermitteln Sie die Abbildungsgleichung von α und ihrer Umkehrabbildung α^{-1}.

b) Bestimmen Sie alle Fixelemente von α (Fixpunkte oder Fixpunktgeraden und Fixgeraden).