Wahrscheinlichkeit für das Weisen beim Jassen

Die Überlegungen werden anhand der französischen Karten mit den Farben Herz, Karo, Kreuz, Pik und den Werten As, König, Dame, Bauer, Zehn, Neun, Acht, Sieben, Sechs (abgekürzt: A, K, D, B, 10, 9, 8, 7, 6) dargestellt.
Aus den 36 Karten kann ein Blatt von 9 Karten auf

$$\binom{36}{9} = \frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} = 94143280$$

(lies: 36 tief 9) Arten zusammengestellt werden.

Es wird nun berechnet, in wie vielen dieser Möglichkeiten der Spieler ein Dreiblatt, Fünfzig oder Hundert bei aufeinander folgenden Karten derselben Farbe weisen kann.

Als einführendes Beispiel wird gezählt, wie oft ein solches Blatt ein Dreiblatt vom Herz-As, nicht aber Fünfzig enthält. Zu den restlichen sechs Karten darf der Herz-Bauer als Anschlusskarte nicht gehören, dagegen Herz 10, 9, 8, 7, 6 und die 27 Karten der andern Farben. Es ergeben sich

$$\binom{5+27}{6} = \frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 906192 \text{ Möglichkeiten}$$

Ein Dreiblatt vom Herz-König hat wegen der beiden Anschlusskarten As und 10 weniger, nämlich

$$\binom{4+27}{6} = \frac{31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 736281 \text{ Möglichkeiten}$$

Unter diesen Möglichkeiten sind natürlich weitere Weise: Dreiblatt, Fünfzig, Hundert dabei. Um diese Fälle zu beschreiben, wird nun systematisch abgezählt.

1. Das Blatt enthält dreimal Dreiblatt.

a) Die Weise können nicht alle von derselben Farbe sein.

b) Zwei Dreiblatt sind von der gleichen Farbe.
Weise sind möglich von A und 10, A und 9, A und 8, K und 9, K und 8 oder D und 8 (sechs Fälle), das dritte, andersfarbige Dreiblatt ist von A, K, D, B, 10, 9 oder 8 (sieben Fälle). Die Farben sind auf $4\cdot 3$ Arten wählbar.
Es gibt

$$4\cdot 3\cdot 6\cdot 7 = 504 \text{ Möglichkeiten}$$

c) Die Weise sind von drei verschiedenen Farben, die auf 4 Arten wählbar sind.

$$4\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 1372 \text{ Möglichkeiten}$$

2. Das Blatt enthält genau zweimal Dreiblatt.

a) Die Weise sind von derselben Farbe.
A und 10, A und 8, D und 8 (drei Fälle) haben zwei auszuschliessende Anschlusskarten, nämlich B und 7, bzw B und 9, bzw K und 9, frei zum Blatt kombinierbar bleibt je eine Karte, nämlich 6, bzw 9, bzw A;
A und 9, K und 9, Kg und 8 (ebenfalls drei Fälle) haben drei Anschlusskarten.
Zu den 27 Karten der andern Farben kommt also im ersten Fall eine mögliche hinzu.

$$4\cdot\left[3\cdot\binom{1+27}{3} + 3\cdot\binom{27}{3}\right] = 74412$$

Hierin sind noch jene Fälle mit dreimal Dreiblatt, die zweimal die gleiche Farbe haben, enthalten.
Für genau zweimal Dreiblatt gleicher Farbe gibt es also

$$74412 - 504 = 73908 \text{ Möglichkeiten}$$

b) Die Weise sind von verschiedener Farbe.
Bezüglich Farben gibt es sechs Möglichkeiten.
Weise von A oder 8 (zwei Fälle) haben eine Anschlusskarte: B bzw 9, somit können fünf Karten derselben Farbe zum Blatt gehören; jene von K, D, B, 10, 9 (fünf Fälle) haben zwei Anschlusskarten. Hier können nur je vier Karten zum Blatt gehören. Wieder werden alle Möglichkeiten gezählt, die mindestens die beiden Dreiblatt enthalten und nachher die dreifachen Dreiblatt subtrahiert. Sind beide Weise von A oder 8, so gibt es $2 \cdot 2$ Fälle. Ist der erste von A oder 8, der andere von K oder D, B, 10, 9, so zählt man $2 \cdot 5$ Fälle; ist der erste von K oder D, B, 10, 9, der zweite von As oder 8, nochmals $2 \cdot 5$ Fälle: Sind beide von von K oder D, B, 10, 9, bleiben noch $5 \cdot 5$ Fälle.

$$6 \cdot \left[2 \cdot 2 \cdot \binom{5+5+18}{3} + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \binom{5+4+18}{3} + 5 \cdot 5 \cdot \binom{4+4+18}{3} \right] = 819624$$

Jedes gleichfarbige dreifache Dreiblatt kommt in dieser Abzählung doppelt vor, jedes verschiedenfarbige dreifache Dreiblatt wird dreimal gezählt.
Für genau zwei verschiedenfarbige Dreiblatt gibt es

$$819624 - 2 \cdot 504 - 3 \cdot 1372 = 814500 \text{ Möglichkeiten}$$

3. Das Blatt enthält genau ein Dreiblatt.
Wieder unterscheidet man die Fälle A oder 8 mit einer Anschlusskarte und K, D, B, 10, 9 mit zwei auszuschliessenden Anschlusskarten.
Wie oben werden die Möglichkeiten, die mindestens ein Dreiblatt enthalten, gezählt und dann die mehrfachen Dreiblatt entfernt.

$$4 \cdot \left[2 \cdot \binom{5+27}{6} + 5 \cdot \binom{4+27}{6} \right] = 21975156$$

Jedes dreifache Dreiblatt kommt in dieser Abzählung dreimal, jedes zweifache Dreiblatt doppelt vor.
Für ein einfaches Dreiblatt gibt es

$$21975156 - 3 \cdot (504 + 1372) - 2 \cdot (73908 + 814500) = 20192712 \text{ Möglichkeiten}$$

4. Man kann zweimal Fünfzig weisen.

a) Zweimal Fünfzig von derselben Farbe, d.h. von A und 9.
Es kommt noch eine andersfarbige Karte hinzu.

$$4 \cdot 27 = 108 \text{ Möglichkeiten}$$

b) Zweimal Fünfzig von verschiedenen Farben.
Bei Weisen von A und 9 gibt es eine Anschlusskarte, bei K, D, B, 10 deren zwei.

$$6 \cdot [2 \cdot 2 \cdot (4+4+18) + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (4+3+18) + 4 \cdot 4 \cdot (3+3+18)] = 5328 \text{ Möglichkeiten}$$

5. Genau einmal Fünfzig.
Man geht vor wie beim Dreiblatt.

$$4 \cdot \left[2 \cdot \binom{4+27}{5} + 4 \cdot \binom{3+27}{5} \right] = 3639384$$

Dabei wird jeder zweifache Fünfzig-Weis doppelt gezählt.
Für genau einmal Fünfzig gibt es

$$3639384 - 2 \cdot (108 + 5328) = 3628512 \text{ Möglichkeiten}$$

6. Hundert

a) aus fünf Karten.

$$4\cdot\left[2\cdot\binom{3+27}{4}+3\cdot\binom{2+27}{4}\right]=504252 \text{ Möglichkeiten}$$

b) aus sechs Karten

$$4\cdot\left[2\cdot\binom{2+27}{3}+2\cdot\binom{1+27}{3}\right]=55440 \text{ Möglichkeiten}$$

c) aus sieben Karten

$$4\cdot\left[2\cdot\binom{1+27}{2}+1\cdot\binom{27}{2}\right]=4428 \text{ Möglichkeiten}$$

d) aus acht Karten

$$4\cdot 2\cdot\binom{27}{1}=4\cdot 2\cdot 27=216 \text{ Möglichkeiten}$$

e) aus 9 Karten 4 Möglichkeiten

Für Hundert gibt es total

$$504252+55440+4428+216+4=564340 \text{ Möglichkeiten}$$

7. Fünfzig und Dreiblatt ; diese Fälle sind bei genau einmal Dreiblatt und genau einmal Fünfzig inbegriffen.

a) mit gleicher Farbe

Der erstgenannte Weis ist die Fünfzig, der zweite das Dreiblatt

A und 9, A und 8, K und 8, 10 und A, 9 und A, 9 und K (sechs Fälle) haben alle zwei Anschlusskarten.

$$4\cdot 6\cdot\binom{27}{2}=8424 \text{ Möglichkeiten}$$

b) mit verschiedener Farbe

Fünfzig von A, 9 haben eine Anschlusskarte, jene von K, D, B, 10 deren zwei.

Dreiblatt von A, 8 haben eine Anschlusskarte, jene von K, D, B, 10, 9 zwei.

$$4\cdot 3\cdot\left[2\cdot 2\cdot\binom{4+5+18}{2}+2\cdot 5\cdot\binom{4+4+18}{2}+4\cdot 2\cdot\binom{3+5+18}{2}+4\cdot 5\cdot\binom{3+4+18}{2}\right]=$$

159048 Möglichkeiten

Für Fünfzig und Dreiblatt gibt es total

$$8424+159048=167472 \text{ Möglichkeiten}$$

8. Hundert und Dreiblatt; diese Fälle sind bei genau einmal Dreiblatt und bei Hundert inbegriffen.

a) mit gleicher Farbe

Bei Hundert in 5 Karten gibt es zwei Fälle: A und 8, 9 und A

$$4\cdot 2\cdot\binom{27}{1}=216 \text{ Möglichkeiten}$$

b) mit verschiedener Farbe

Für Hundert in fünf Karten analog zu 7b)

Hundert von A, 10 haben eine Anschlusskarte, jene von K, D, B deren zwei.

$$4 \cdot 3 \cdot \left[2 \cdot 2 \cdot \binom{3+5+18}{1} + 2 \cdot 5 \cdot \binom{3+4+18}{1} + 3 \cdot 2 \cdot \binom{2+5+18}{1} + 3 \cdot 5 \cdot \binom{2+4+18}{1} \right] =$$

$$10368 \text{ Möglichkeiten}$$

Bei Hundert in sechs Karten sind es

$$4 \cdot 3 \cdot [2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 1] = 336 \text{ Möglichkeiten}$$

Für Hundert und Dreiblatt gibt es total

$$216 + 10368 + 336 = 10920 \text{ Möglichkeiten}$$

9. Hundert und Fünfzig; diese Fälle sind bei genau einmal Fünfzig und bei Hundert inbegriffen.

Die Weise sind notwendig von verschiedener Farbe. Hundert in fünf Karten.

$$4 \cdot 3 \cdot [2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4] = 360 \text{ Möglichkeiten}$$

Wahrscheinlichkeiten

für ein Dreiblatt ohne weitere Weise

$$p = \frac{20192712 - 167472 - 10920}{94143280} = \frac{20014320}{94143280} = 21.26\%$$

für ein Dreiblatt und eventuell weitere Weise

$$p = \frac{20192712 + 73908 + 814500 + 504 + 1372}{94143280} = \frac{21082996}{94143280} = 22.39\%$$

für Fünfzig ohne weitere Weise

$$p = \frac{3628512 - 167472 - 360}{94143280} = \frac{3460680}{94143280} = 3.68\%$$

für Fünfzig und eventuell weitere Weise

$$p = \frac{3628512 + 108 + 5328}{94143280} = \frac{3633948}{94143280} = 3.86\%$$

für Hundert ohne weitere Weise

$$p = \frac{564340 - 10920 - 360}{94143280} = \frac{553060}{94143280} = 0.59\%$$

für Hundert und eventuell weitere Weise

$$p = \frac{564340}{94143280} = 0.60\%$$

Bei den obigen Überlegungen wurden Weise für Stöcke oder viermal denselben Kartenwert nicht berücksichtigt.